

# ENSINO APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E FUNÇÕES EXPONENCIAIS USANDO EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS.

Vagner Rodrigues de Moraes – Marcelo de Carvalho Borba – Educação – Matemática - Departamento de Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Campus de Rio Claro.

A modelagem pode ser usada tanto como objeto de pesquisa quanto no processo de ensino-aprendizagem (Bassanezi[1]). Na pesquisa, esta aparece em várias áreas tais como Biologia, Física, Química e também em áreas sociais como Economia e Geografia. Na aprendizagem, principalmente em salas de aula, o processo de modelagem com fatos cotidianos têm despertado um maior interesse dos alunos em aprender determinados conteúdos matemáticos, mostrando também a importância de se aprender Matemática para o convívio em sociedade.

É muito freqüente, quando pretendemos modelar um determinado fenômeno, nos depararmos com equações que envolvem “variações” de certas quantidades consideradas essenciais. O uso de Equações de Diferenças, ou Diferenciais, para representar essas variações corresponde, essencialmente, ao fato do fenômeno ser visto em tempo discreto, ou contínuo. Diante disto, as Equações de Diferenças (e Diferenciais) se tornam uma das ferramentas de análise indispensáveis em áreas como a Física, Química, Biologia, dentre outras (Leah[2]).

Apresentamos aqui um estudo inicial sobre sistemas dinâmicos discretos, com relação a pontos de equilíbrio e estabilidade e propomos também algumas atividades a serem desenvolvidas no Ensino Médio como motivação para o estudo de logaritmos e progressões geométricas.

Modelar usando um sistema dinâmico discreto é modelar um fenômeno que varia com o tempo, que é considerado de forma discreta. Vejamos um exemplo:

Suponha que um banco pague àquele que aplicar uma certa quantia em dinheiro numa poupança, uma taxa de 5% ao ano. Considere inicialmente uma quantia de R\$1000,00. Então, no próximo ano teremos R\$1050,00, no segundo ano R\$1102,00 e assim sucessivamente. Observe que no segundo ano foi calculado 5% da quantia do ano anterior, ou seja, 5% de R\$1050,00. Matematizando este problema, vamos considerar  $A(n)$  a quantia na conta no ano  $n$ .

Tomando  $A(0)$  como sendo o depósito inicial para a abertura da conta poupança, ou seja,  $A(0)=1000$ , temos  $A(1)=1050$  e  $A(2)=1102$ . Logo,

$$\begin{aligned}A(1) &= A(0) + 0,05A(0) = (1,05)A(0) \\ A(2) &= A(1) + 0,05A(1) = (1,05)^2A(0)\end{aligned}$$

Generalizando, se quisermos saber a quantia que teremos no ano  $(n+1)$ , então teremos o seguinte sistema:

$$A(n+1) = (1,05)A(n).$$

Olhando para os cálculos acima, estes nos “induzem” à seguinte solução:

$$A(k) = (1,05)^k A(0).$$

Generalizando este problema, poderíamos chamar a taxa de juros de  $I\%$  e então teríamos

$$A(n+1) = (1+I)A(n) \text{ e, como solução, } A(k) = (1+I)^k A(0).$$

Observemos que, para sabermos a quantia num certo tempo  $k$ , temos necessariamente que saber a quantia inicial depositada na poupança.

Vejamos, agora, algumas definições e teoremas, estudadas durante o período de iniciação científica.

**Definição 1:** Suponha que temos uma função  $y=f(x)$ . Um sistema dinâmico discreto de 1ª ordem é uma sequência de números  $A(n)$ , para  $n=0, 1, \dots$  tais que cada número depois do primeiro é encontrado pela relação recursiva

$$A(n+1)=f(A(n)).$$

A sequência de números dada pela relação

$$A(n+1)-A(n)=g(A(n)), \text{ onde } f(x)=g(x)+x$$

é chamada de **Equação de Diferenças de 1ª Ordem**.

**Definição 2:** Um sistema dinâmico da forma

$$A(n+1)=f(A(n+m-1), A(n+m-2), \dots, A(n)),$$

onde  $m$  é um número inteiro positivo, é chamado de **sistema dinâmico de ordem m**, já que este depende de  $m$  condições iniciais para ser calculado.

**Definição 3:** Considere um sistema dinâmico de 1ª ordem

$$A(n+1)=f(A(n)).$$

Um número  $a$  é chamado **valor de equilíbrio** para este sistema se  $A(k+1)=A(k)=a \quad \forall \quad k$ , ou seja,  $A(k)=a$  é solução constante para o sistema dinâmico.

**Teorema 1:** O número  $a$  é um valor de equilíbrio para o sistema dinâmico  $A(n+1)=f(A(n))$  se, e somente se,  $a=f(a)$ .

**Dem.:** Imediata.

**Definição 4:** Suponha que um sistema dinâmico de 1ª ordem possui um valor de equilíbrio  $a$ . Este valor de equilíbrio é **estável**, ou atrator se existe um número  $\varepsilon > 0$ , único para cada sistema, tal que, quando

$$|A(k) - a| < \varepsilon, \text{ então } \lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = a.$$

Um valor de equilíbrio é **instável**, ou repulsor, se existe um número  $\varepsilon > 0$ , tal que, quando

$$0 < |A(0) - a| < \varepsilon, \text{ então } |A(k) - a| > \varepsilon.$$

O teorema a seguir nos dá uma ferramenta para sabermos se um valor de equilíbrio, para um sistema dinâmico afim, é repulsivo ou atrator, sem precisar calcular vários valores do sistema.

**Teorema 2:** O valor de equilíbrio  $a = \frac{b}{1-r}$  para o sistema dinâmico

$$A(n+1)=rA(n)+b, \quad r \neq 1,$$

é estável se  $|r| < 1$ , ou seja, tende a  $a$ , quando  $k$  cresce indefinidamente,  $\forall \quad A(0)$ . Se  $|r| > 1$ , então  $a$  é instável e  $|A(k)|$  cresce indefinidamente,  $\forall \quad A(0) \neq a$ . Quando  $r = -1$ , temos o que é conhecido como 2-ciclo.

Para um sistema dinâmico de 1ª ordem geral, temos o seguinte teorema com relação à estabilidade.

**Teorema 3:** Suponha que  $a$  é um valor de equilíbrio para o sistema dinâmico

$$A(n+1)=f(A(n)).$$

O valor de equilíbrio  $a$  é estável, ou atrator, se  $|f'(a)| < 1$  e é instável, ou repulsor, se  $|f'(a)| > 1$ . Se  $|f'(a)| = 1$ , o teste é inconclusivo.

Poderíamos ter, por exemplo, o sistema dinâmico discreto  $A(n+1)=3,2A(n)-0,8A^2(n)$ . Consideremos a curva  $f(x)=3,2x-0,8x^2$ . Os valores de equilíbrio, que são soluções da equação  $a=3,2a-0,8a^2$  são  $a=0$  e  $a=2,75$ . Temos, então, que  $f'(x)=3,2-1,6x$ . Segue que  $f'(0)=3,2$  e  $f'(2,75)=-1,2$ . Pelo **Teorema 3**, podemos concluir que os pontos  $a=0$  e  $a=2,75$  são instáveis. Logo, o sistema  $A(n+1)=3,2A(n)-0,8A^2(n)$  terá um 2-ciclo.

Com relação à utilização de equações de diferenças como motivação para o ensino de determinados conteúdos do Ensino Médio, podemos sugerir um tema, como por exemplo, FORMATURA, onde estes conceitos podem surgir. Nesta sugestão, conteúdos como funções logarítmicas e progressões geométricas, dentre outros, poderiam ser introduzidos.

É de fundamental importância que o professor faça questionamentos à medida que o trabalho em sala avança. Vamos supor que se está trabalhando com alunos do 1º ano do Ensino Médio, no mês de outubro, tendo, portanto, como objetivo usar o dinheiro investido para pagamento da formatura de toda a sala.

Vejamos, então, um primeiro problema:

Suponha que toda sala abra uma poupança em um banco que pague juros de 0,7% ao mês, fazendo um depósito inicial  $x_0$ , com o objetivo de deixar aquele dinheiro no banco por 24 meses.

Os alunos poderiam calcular a quantia presente na conta após vários meses para que percebam a dificuldade de obterem o quanto terão após 24 meses.

Generalizando, poderiam considerar  $A(n)$  a quantia de dinheiro na poupança no  $n$ -ésimo mês depois que foi aberta a conta, a taxa de juros  $I=0,7\%$  e o depósito inicial  $A(0)=x_0$ . Nos próximos meses teremos:

$$\begin{aligned} A(1) &= A(0) + 0,007A(0) = 1,007A(0) \\ A(2) &= (1,007)^2 A(0) \quad A(3) = (1,007)^3 A(0) \end{aligned}$$

Estes primeiros cálculos deveriam “induzir” os alunos de que no mês  $(n+1)$  teriam a seguinte situação:

$$A(n+1) = A(n) + IA(n) = (1+I)A(n).$$

Além disso, também os induziria a pensar que nos mês  $k$  teríamos

$$A(k) = (1,007)^k A(0), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ou seja, no  $k$ -ésimo mês os alunos saberiam quanto dinheiro teriam nesta poupança.

Por exemplo, se o depósito inicial for de R\$100,00, o tempo que levaríamos para conseguir R\$100000,00 seria dado por  $A(k)=100000=(1,007)^k 100$ . Logo,  $1000=(1,007)^k$ . A partir deste problema, poderíamos introduzir conceitos de logaritmos e mostrar aos alunos que esta é uma ferramenta útil para resolver vários problemas, inclusive o problema que nos deparamos acima.

Outros questionamentos podem ser feitos:

a) Qual deveria ser o depósito inicial para que tivéssemos uma certa quantia  $A(k)$  depois de  $k$  meses?;

b) E se não tivéssemos condições de depositar uma quantia muito alta e pudéssemos depositar um pouco a cada mês, em quanto tempo teríamos a quantia desejada?

Conceitos como função crescente, decrescente, em exponenciais e logaritmos, e de progressões geométricas poderiam ser introduzidos com estes problemas.

Concluimos que o estudo dos vários tipos de sistemas dinâmicos discretos, suas respectivas soluções e exemplos, permitem nos uma maior e melhor visão daquilo que acontece ao nosso redor, no sentido de permitir uma modelagem matemática simples, porém, muitas vezes eficaz para aquilo que estamos estudando, para situações cotidianas. Durante todo o período de iniciação científica, foi possível entender de uma forma simples como o estudo de sistemas dinâmicos estão ligados à nossa vida. Tais estudos são de suma importância para que futuramente se possam entender modelagens mais complexas e para que sejamos capazes de modelar situações que instiguem a sala.

### **Bibliografia**

[1] Bassanezi, Rodney Carlos; “Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática”; Editora Contexto; 2002.

[2] Keshet, Leah Edelstein – “Mathematical Models in Biology”; Birkhäuser Mathematics Series; 1988.

[3] Sandefur, James T.; “Discrete Dynamical Systems”; Oxford: Claredon; 1990.